

ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EN UN MODELO PORO-ELASTOHIDRODINÁMICO DE JUNTA SINOVIAL

DI PAOLO, J.¹
CORVALÁN, CM.¹
SAITA, FA.²

RESUMEN:

Se describen resultados computacionales de un simple modelo mecánico que posee algunas características en común con las articulaciones sinoviales. El modelo describe el fenómeno de lubricación por deslizamiento entre dos superficies cilíndricas cubiertas por una capa de material elástico y poroso, en contacto a través de un fluido lubricante. Se determinan la presión en el fluido, la deformación de los cartílagos y la exudación local que producen, así como el caudal de lubricante entre las superficies. Para ello se utiliza el método de Elementos Finitos combinado con técnicas especiales para la parametrización de la frontera libre que aparece al utilizar condiciones de contorno realistas a la salida del flujo (gradiente de presión nulo). Se exponen algunas conclusiones sobre las características autolubrificantes y de baja fricción de las articulaciones sinoviales en conexión con la exudación del líquido de las superficies porosas.

PALABRAS CLAVE:

lubricación elastrohidrodinámica, sustratos porosos, juntas sinoviales, elementos finitos, coeficiente de fricción.

INTRODUCCIÓN

Las articulaciones de los vertebrados, conocidas como juntas sinoviales son contactos lubricados que poseen la particularidad de trabajar en distintos modos de funcionamiento (arranque, movimiento pleno, parada) y distintos regímenes de cargas con muy bajos coeficientes de fricción [1]. Su larga vida en buenas condiciones de operación hace del funcionamiento de las juntas sinoviales un importante objeto de estudio que, mas allá de su complejidad fisiológica, puede indagarse a través de las leyes de la mecánica.

Dentro de los distintos modos de funcionamiento de una articulación, el movimiento pleno muestra un comportamiento mecánico análogo al de los cojinetes de máquinas. Es decir: sólidos que

¹ Grupo Biomecánica Computacional
Facultad de Ingeniería - UNER. Casilla de Correo 47 Suc. 3, 3100 Paraná, Argentina
² Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (UNL-CONICET), Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

ABSTRACT:

Computational results of a simple mechanical model having common characteristics with synovial joints are presented. The model describes the lubrication phenomenon taking place between two cylindrical surfaces covered by elasto-porous materials. Deformations, pressures and exudations on the lubricated surfaces are locally calculated as well as the amount of lubricating liquid flowing between them. For that purpose the employed F.E.M. is coupled with suitable techniques to parameterize the unknown location of the outflow boundary with zero pressure gradient. Several conclusions are presented regarding the self-lubricating and low friction characteristics of synovial joints and their connections with the liquid exuded by the porous surfaces.

KEYWORDS:

Elastrohydrodynamic lubrication, Porous substrates, Sinovial joints, Finite elements, Friction coefficient.

debido a su movimiento arrastran un fluido viscoso por un canal estrecho, originando en el seno del fluido una distribución de presión que soporta la carga evitando que los sólidos se toquen. A su vez, la presión del fluido actúa sobre los sólidos deformándolos. Los sistemas que presentan estas características se conocen con el nombre de elastrohidrodinámicos (EHD) y sus ecuaciones representativas [2] usualmente se toman como base para modelar el comportamiento de las juntas sinoviales [3, 4].

Existen, sin embargo, varias características de las articulaciones que la diferencian de los cojinetes. Entre ellas, la porosidad de los cartílagos ha sido señalada como principal responsable en la formación de la película lubricante [5]. Por su porosidad, los cartílagos son capaces de exudar fluido por compresión y absorberlo durante su expansión variando las condiciones locales de lubricación de la junta. Debido a esto, las juntas sinoviales pueden considerarse como sistemas poro-elastrohidrodinámicos (PEHD) capaces de generar su propia película lubricante por compactación.

Recepción del artículo en su primera versión: noviembre /98

Aprobación del artículo en su versión final: marzo /99

Responsable:

José Di Paolo

Grupo Biomecánica Computacional

Facultad de Ingeniería - UNER, Casilla de Correo 47 Suc. 3, 3100

Paraná, Argentina

El propósito de este trabajo es desarrollar, usando una mecánica del continuo relativamente simple, un modelo computacional que permita analizar si el proceso de exudación/absorción del fluido sinovial por parte de los cartílagos es efectivamente uno de los mecanismos responsables de la autolubricación de la articulación. Asimismo, determinar si este proceso tiene alguna influencia sobre los bajos coeficientes de fricción característicos de las articulaciones.

A pesar del simple modelo desarrollado, la obtención de resultados requiere usar robustas técnicas numéricas. Estas técnicas son necesarias debido al mal condicionamiento de las ecuaciones gobernantes y a la aparición de fronteras libres que delimitan la extensión del campo de presión en la articulación. La técnica numérica empleada está basada en el método de elementos finitos combinado con una conveniente parametrización de la frontera libre. Esta técnica desarrollada por Kistler en 1983 [6] para simular flujos con superficie libre ha sido también aplicada en problemas de lubricación por Di Paolo en 1998 [7].

El método de elementos finitos en la forma en que se aplica en este trabajo permite determinar simultáneamente la posición de la frontera libre y los campos de presión, deformación y exudación en la superficie del cartílago articular; de esta manera, es posible realizar un análisis detallado del proceso de lubricación. Los resultados obtenidos muestran la disminución del factor de fricción y el afianzamiento del fenómeno de autolubricación por compactación a medida que la porosidad crece.

ECUACIONES DEL MODELO

El sistema de ecuaciones del modelo está fundado en las leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento aplicadas al sistema representado en la figura 1. Esta figura es una representación geométrica del contacto lubricado formado por los huesos, cartílagos y líquido sinovial en una articulación típica. Los huesos serán considerados rígidos y los cartílagos como materiales deformables y porosos que, a pesar de su complejidad constitutiva, serán tratados como sólidos con propiedades mecánicas isotrópicas [8]. El fluido sinovial, que es una solución de ácido hialurónico y plasma, actúa como lubricante de la junta y posee características viscoelásticas [9] aunque, por razones de simplicidad, será modelado como un fluido newtoniano [8].

Como se muestra en la figura 1, las superficies lubricadas están representadas por dos cilindros de radios R_1 y R_2 respectivamente. La superficie superior gira con velocidad tangencial $2V$ mientras la inferior se mantiene fija. Los cilindros están recubiertos por una capa elástica y porosa de pequeño espesor (L) capaces de exudar fluido intersticial por compactación. La figura 1 muestra los cilindros en un hipotético estado indeformado sujetos a una carga W en dirección diametral. Las ecuaciones de las superficies cilíndricas son:

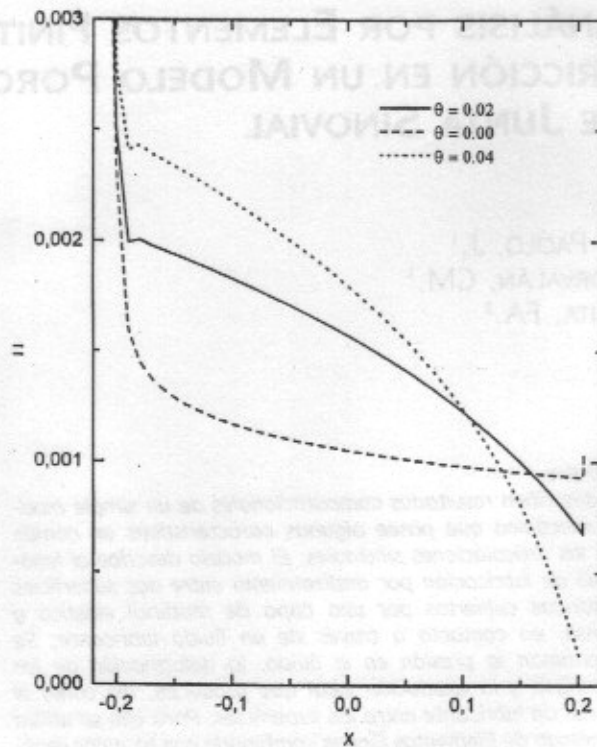


Figura 1.- Representación simplificada de la región de contacto lubricado de una junta sinovial cargada en un hipotético estado indeformado.

$$H_1^0(X) = R_1 \left(1 - \left[1 - \left(\frac{X}{R_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

$$H_2^0(X) = R_2 \left(1 - \left[1 - \left(\frac{X}{R_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - 2H_0$$

Como en una articulación típica las relaciones X/R_1 y X/R_2 son ambas mucho más pequeñas que 1, una buena aproximación de las expresiones anteriores se obtiene expandiéndolas alrededor de $X=0$. Despreciando los términos de cuarto orden en adelante se obtiene:

$$H_1^0(X) = \frac{1}{2R_1} X^2$$

$$H_2^0(X) = \frac{1}{2R_2} X^2 - 2H_0$$

Si las magnitudes de las deformaciones en la dirección Y de las paredes porosas son $D_1(X)$ y $D_2(X)$, el espesor del canal de flujo $H = (H_2^0 + D_2) - (H_1^0 - D_1)$ está dado por:

$$H(X) = -2H_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] X^2 + D(X)$$

donde $D(X) = D_1(X) + D_2(X)$. Definiendo las longitudes características para las direcciones X y Y como $(RL)^{1/2}$

y L respectivamente, donde $1/R = 1/2 [1/R_2 - 1/R_1]$, la versión adimensional de la ecuación del canal de flujo queda:

$$h(x) = -2h_0 + x^2 + d(x) \quad (1)$$

donde $2h_0 = 2H_0/L$ es el cruzamiento de los sólidos en estado indeformado y $d(x) = D(X)/L$ es la deformación local adimensional.

En virtud de que el espesor del canal de flujo es pequeño respecto a los radios de los cilindros, la inclinación de las superficies en la región de interés es despreciable por lo que el flujo es prácticamente unidireccional y puede ser bien representado a través de la aproximación conocida como ecuación de lubricación de Reynolds. Para un fluido incompresible y newtoniano de viscosidad M constante, la ecuación de Reynolds relaciona localmente el gradiente de presión en el fluido con el espesor del canal y el caudal. En condiciones estacionarias [2]:

$$\frac{dP}{dX} = 12\mu \left(\frac{VH - Q_e}{H^3} \right)$$

donde Q_e es el caudal en el canal y, debido a la exudación, es función de la posición.

La solución numérica de la ecuación de Reynolds en su forma diferencial presenta sobreestimaciones y fuertes oscilaciones en el campo de presión que en muchos casos invalidan los resultados. Para evitar estas oscilaciones, siguiendo lo mostrado en [10] se utilizará la ecuación, en forma integral, versión que presenta un mejor comportamiento numérico a cambio de mayor tiempo de cómputo; en forma adimensional:

$$p(x) = 12 \int_{-\infty}^x \frac{h - 2q_e}{h^3} dx, \quad (2)$$

donde se han definido la presión y el caudal adimensional como $p = (PL/\mu V)(L/R)^{1/2}$ y $q_e = Q_e/2VL$ respectivamente.

Debido al término h^{-3} en la ecuación (2) la presión tendrá valores elevados en las zonas donde el canal es estrecho. Por el contrario, en los extremos del dominio donde la altura del canal es grande la presión baja a los valores ambientales. Esta presión ambiente será tomada como presión de referencia y considerada cero.

Para evitar que en los resultados aparezcan presiones subambientales espúreas, se adoptan las llamadas condiciones de contorno de Reynolds [2, 7]: a la entrada del contacto, donde el canal de flujo es convergente, la presión toma el valor de referencia lejos de la línea de centros ($x \rightarrow -\infty$) y a la salida del contacto donde el canal es divergente, la presión se anula en un punto cuya ubicación \bar{x} se desconoce. Asimismo, se considera que a la salida del contacto, la presión se reduce suavemente hacia el valor ambiental. En suma, las condiciones de contorno que cumple la distribución de presión son:

$$x \rightarrow \infty, \quad p = 0$$

$$x = \bar{x}, \quad p = \frac{dp}{dx} = 0$$

La determinación de la ubicación de \bar{x} involucra una incógnita adicional que se resuelve a través de la condición de gradiente de presión nulo en \bar{x} . Esta condición introducida en (2) permite escribir:

$$h \Big|_{\bar{x}} = 2q_e \Big|_{\bar{x}} \quad (3)$$

En forma análoga, la introducción de la condición de presión nula en \bar{x} en la ecuación (2), permite obtener una ecuación para el caudal de entrada $q_e[-\infty]$:

$$0 = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \frac{h - 2q_e}{h^3} dx, \quad (4)$$

El problema elástico en los cartílagos porosos que recubren los huesos de la articulación, responde a un estado de deformación plana [2]. En los casos en que la región de carga es mayor que el espesor de los sólidos, puede utilizarse el modelo de deformación proporcional ó de columna [8, 11] que expresa que la deformación local es proporcional al esfuerzo (presión del fluido), es decir,

$$D_1(X) = D_2(X) = P(X) \frac{L}{E''}$$

con lo que la deformación total adimensional resulta:

$$d(x) = N_e p(x), \quad (5)$$

donde $N_e = \mu V / LE'' (R/L)^{1/2}$ es un número adimensional que relaciona las fuerzas viscosas y las fuerzas elásticas del sistema y $E'' = (1-\nu) E / [(1-2\nu)(1+\nu)]$; E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson de los cartílagos respectivamente.

La conservación de masa indica que el caudal total de fluido Q que circula en la dirección X es constante. Siendo Q la suma del líquido que fluye por el canal ($Q_e(X)$) y el que transportan convectivamente los cartílagos porosos ($Q_i(X)$) puede escribirse:

$$Q = Q_e(X) + Q_i(X)$$

El caudal localmente transportado por los cartílagos en la zona de carga es el transportado al inicio del canal (Q^0_i) menos la porción de fluido que, estando originalmente en los poros, ha pasado al canal de flujo por efecto de la deformación,

$$Q_i(X) = Q^0_i - V \theta D(X)$$

donde el factor de exudación θ puede interpretarse como la porosidad superficial de los cartílagos, o bien como la fracción de fluido intersticial capaz de ser exudado por compactación. En adelante θ será trata-

do como un parámetro puesto que no existen datos publicados acerca de su valor durante el funcionamiento de la articulación.

En el análisis previo hemos supuesto que los poros están conectados solo en la dirección transversal al movimiento y hemos desestimado cualquier flujo longitudinal excepto el transporte convectivo. Si bien esta suposición puede estar algo distante de la realidad, dadas las condiciones de operación del sistema el fluido dentro de los cartílagos difunde principalmente en la dirección transversal.

Llamando $Q_e(-\infty)$ a la constante $(Q-Q^0)$ puede obtenerse la ecuación:

$$q_e(x) = q_e(-\infty) + \frac{1}{2} \theta p(x) \quad (6)$$

Las ecuaciones (1) a (6) constituyen el modelo PEHD propuesto para representar el contacto lubricado de una junta sinovial en la fase de movimiento pleno. La fuerte no-linealidad del sistema que surge de la interacción sólido-líquido en las superficies que delimitan el canal de flujo, sumado a la permeabilidad de los sólidos y la frontera libre del problema, hacen necesaria la utilización de eficientes algoritmos computacionales para obtener la solución de las ecuaciones.

CARGA Y FACTOR DE FRICCIÓN:

La carga por unidad de longitud axial sobre el contacto es una fuerza que puede calcularse mediante la integración del campo de presión,

$$w = \frac{WL}{\mu VR} = \int_{-\infty}^{\bar{x}} p(x) dx. \quad (7)$$

Por otro lado las fuerzas tangenciales de fricción $F_{1,2}$, por unidad de longitud axial en cada una de las superficies articulares, están dadas por la integral del esfuerzo cortante τ en toda la extensión del contacto. Adimensionalizando los esfuerzos cortantes con la presión característica, se tiene:

$$f_{1,2} = \frac{FL}{\mu VR} = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \tau_{1,2} dx \quad (8)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican las superficies inferior y superior respectivamente.

El esfuerzo cortante se determina aproximando el canal en cada posición como dos pequeñas placas paralelas separadas por una distancia igual a la altura local del canal. En forma adimensional:

$$\tau_{1,2} = \mp 6N_f \frac{h-2q_e}{h^2} + \frac{2N_f}{h} \quad (9)$$

donde $N_f = (L/R)^{1/2}$

Por último, se define el factor de fricción θ en cada superficie articular como el cociente entre la fuerza de fricción y la carga actuante sobre el contacto [12], es decir:

$$\phi_{1,2} = \frac{F_{1,2}}{W} = \frac{f_{1,2}}{w} \quad (10)$$

Tanto w COMO $\tau_{1,2}$ no son variables del sistema de ecuaciones planteado, sin embargo, pueden calcularse una vez conocidos los valores de p , h y q_e .

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

Las mayores complicaciones que encierra la solución numérica de las ecuaciones del sistema PEHD planteado, radican en el fuerte acoplamiento que existe entre la presión del fluido y la deformación de los cartílagos y en el desconocimiento del dominio en donde deben ser resueltas las ecuaciones. Los algoritmos usuales para la solución de problemas EHD se fundan en el desacoplamiento de las ecuaciones y en fuertes hipótesis predictivas de la solución que permiten construir una inicialización adecuada de dichos algoritmos para su posterior convergencia [2]. Estos esquemas de cálculo son sólo aplicables en ciertos rangos de cargas de los cuales depende el algoritmo y su inicialización.

En este trabajo se implementó una robusta técnica de resolución computacional basada en:

- 1) Discretización de las ecuaciones por el método de Elementos Finitos y los residuos ponderados de Galerkin.
- 2) Solución simultánea de las ecuaciones por medio del método de Newton, involucrando en cada iteración la determinación del dominio del problema.
- 3) Parametrización de la superficie libre y discretización adaptable en función de la posición de la frontera desconocida \bar{x} .
- 4) Control del paso del parámetro y continuación paramétrica.

La metodología tiene su origen en los años '80 con el advenimiento de las grandes computadoras y con el estudio de problemas de flujo con superficies libres relacionados con procesos de recubrimiento. El manejo de la frontera libre \bar{x} y la adaptabilidad de la discretización nodal en función de ella consiste en una implementación unidimensional del método de los *spines* creado para la localización de las superficies libres antes referidas [11].

En nuestro caso, los nodos cuya posición se varía en cada iteración, de acuerdo a la localización de la frontera libre, son los que se encuentran desde el centro del dominio hasta la frontera libre mientras que los restantes se mantienen fijos. La metodología de solución aquí empleada fue utilizada por Di Paolo [13, 7] para la solución del problema de contacto lineal en sus formulaciones elastohidrodinámica y termoelastohidrodinámica, donde se han comprobado las aptitudes de esta técnica para obtener soluciones en todo el rango de cargas sin desacoplar las ecuaciones y sin depender de complejas estimaciones iniciales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados que se presentan fueron obtenidos para un grupo de parámetros físicos y operativos representativos de una rodilla humana cuyos valores se muestran en la Tabla 1 [8]. Para la obtención de los resultados, se mantienen Constantes los números adimensionales N_e , N_f y h_0 y se varía el factor de exudación θ . El comportamiento del sistema ante la variación de los parámetros N_e , N_f y h_0 está en correspondencia con los reportados en [2] y [13] por lo que aquí no se han incluido.

Las predicciones fueron obtenidas con 140 nodos dispuestos de manera de captar los fuertes gradientes de presión y deformación. El proceso de solución se inicia para un valor de h_0 representativo de una gran separación entre las superficies articuladas (ver fig. 1 y ec. (1)). En esas condiciones, presiones y deformaciones nulas y $\bar{x}=0$ son valores satisfactorios para la convergencia del método de Newton. Después de esta primera convergencia, los siguientes resultados se obtienen a través de un proceso de continuación paramétrica en h_0 , disminuyendo la separación de las superficies hasta conseguir un valor de carga típico para la articulación en estudio. A partir de allí, manteniendo constante h_0 , se realiza continuación paramétrica de forma de aumentar el parámetro θ .

En las figuras que siguen se comparan los resultados correspondientes a tres valores de θ : $\theta=0$ (no poroso), $\theta=0.02$ tomado como base para la comparación y $\theta=0.04$. La figura 2 muestra la distribución de presión para estos tres valores del factor de exudación. Puede observarse que la presión (y como consecuencia la carga soportada) es casi insensible a las variaciones de θ . Estas alteraciones mínimas de la presión sin embargo tienen consecuencias significativas tanto en el canal de flujo como en el caudal de líquido en el canal como se muestra en las figuras 3 y 4.

La figura 3 muestra los canales de flujo correspondientes a las presiones de la figura 2. Se ve con claridad como el canal pasa de ser levemente convexo cuando el cartilago es no poroso ($\theta=0$) a presentarse cada vez mas cóncavo y más estrecho a la salida a medida que θ aumenta. Para $\theta=0.02$ el espesor de canal ha aumentado en el centro ($x=0$) un 50% y en la salida, donde se encuentra el mínimo, se ha estrechado un 30% respecto del canal no poroso. Es notorio el cierre del canal en la zona de salida de flujo al aumentar el parámetro de exudación; este efecto se debe a la fuerte disminución del caudal de entrada que se produce al aumentar los valores de θ . Dado que el caudal de salida debe ser igual al de entrada, el sistema satisface este requerimiento reduciendo la sección de paso al final del contacto

La figura 4 muestra las variaciones del caudal circulante a lo largo del contacto en función del factor de exudación. Puede verse que los ensanchamientos que sufre el canal en la zona central del contacto vistos en la figura 3, resultan necesarios

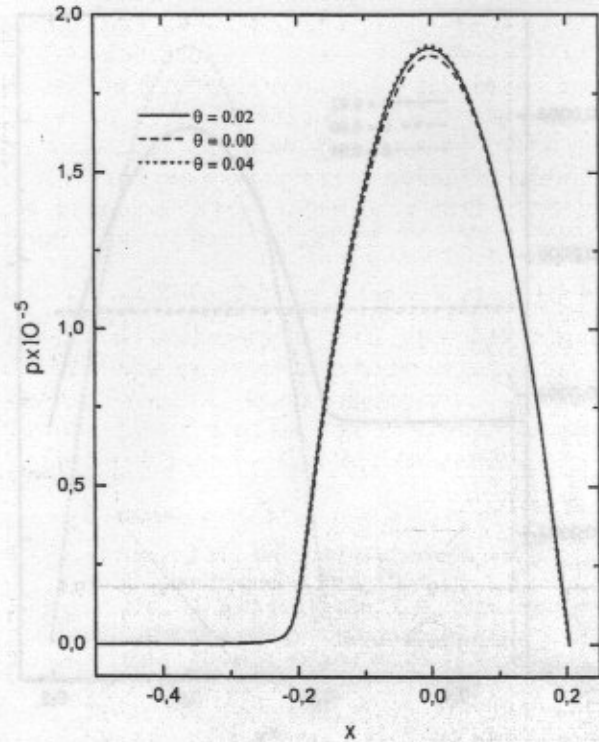


Figura 2.- Distribuciones de presión para $N_e = 1.12 \times 10^{-7}$, $N_f = 4.14 \times 10^{-2}$, $h_0 = 2.04 \times 10^{-2}$ y distintos valores del factor de exudación.

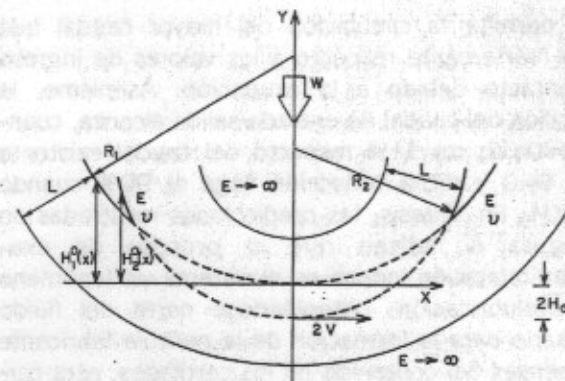


Figura 3.- Espesores del canal de flujo para $N_e = 1.12 \times 10^{-7}$, $N_f = 4.14 \times 10^{-2}$, $h_0 = 2.04 \times 10^{-2}$ y distintos valores del factor de exudación.

R	0.7 m
V	0.0191 m/sec
μ	0.01 Pa sec
E	16×10^6 Pa
ν	0.4
H_0	0.2451×10^{-2} m
L	1.2×10^{-2} m
θ	0.02
W	5.715×10^3 N/m

Tabla 1.- Parámetros físicos y operativos de una rodilla humana.

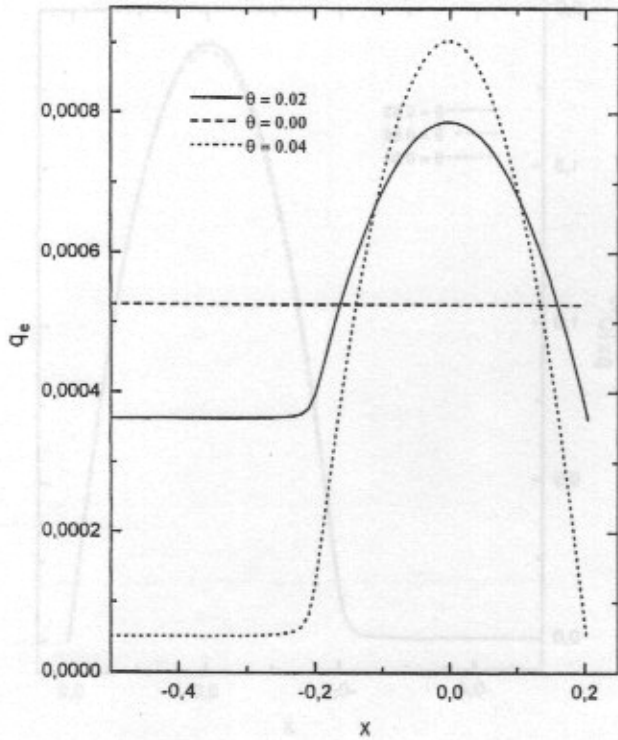


Figura 4.- Caudales circulantes por los canales de flujo para $N, = 1.12 \times 10^{-7}$, $Nf 4.14 \times 10^{-2}$ 5 $ho=2.04 \times 10^{-2}$ y distintos valores del factor de exudación.

para permitir la circulación del mayor caudal que crece fuertemente respecto a los valores de ingreso al contacto debido a la exudación. Asimismo, la reducción del caudal de entrada/salida alcanza, cuando $\theta=0.02$, un 31% respecto del caudal existente para $\theta=0$ y dicha reducción llega al 90% cuando $\theta=0.04$. En síntesis, las predicciones mostradas en la figura 4 indican que el proceso de exudación/imbibición induce en el sistema un fenómeno de autolubricación, obteniéndose parte del fluido necesario para la formación de la película lubricante a expensas del contenido en los cartílagos, esta característica se acentúa al aumentar el factor de exudación.

La figura 5 muestra la velocidad (dq_e/dx) con que los cartílagos exudan o absorben fluido. Como las curvas de presión no son simétricas respecto a la línea de centros, las velocidades de exudación y absorción no son iguales. Sin embargo, como todo el caudal exudado debe ser luego absorbido para satisfacer la conservación de masa, el área que encierran las velocidades de exudación debe ser igual a la que encierran las velocidades de absorción. Este patrón de exudación/imbibición coincide cualitativamente con el predicho por Mow y Lai [5] a través de un modelo bibásico de cartílago, donde no se tuvo en cuenta la interacción dinámica sólido-fluido que ocurre en los contactos lubricados.

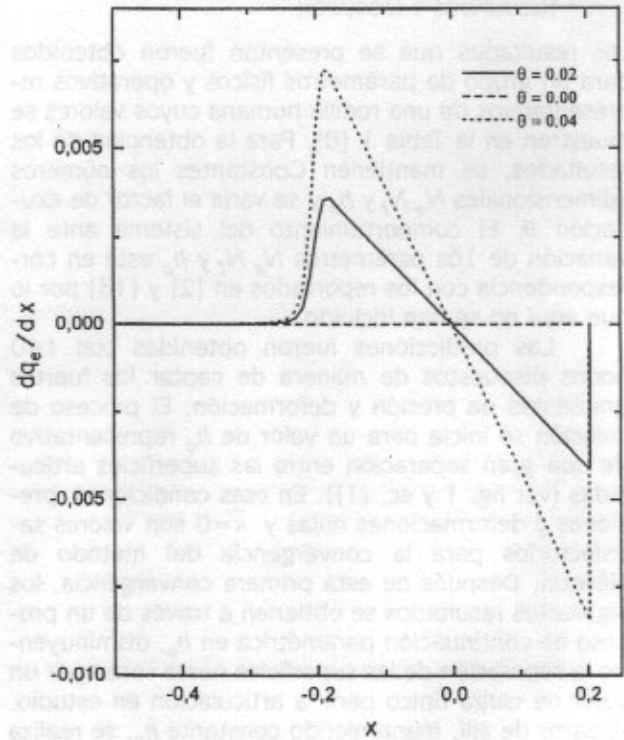


Figura 5.- Velocidades de exudación/absorción para $N, = 1.12 \times 10^{-7}$, $Nf = 4.14 \times 10^{-2}$) $ho = 2.04 \times 10^{-2}$ y distintos valores del factor de exudación.

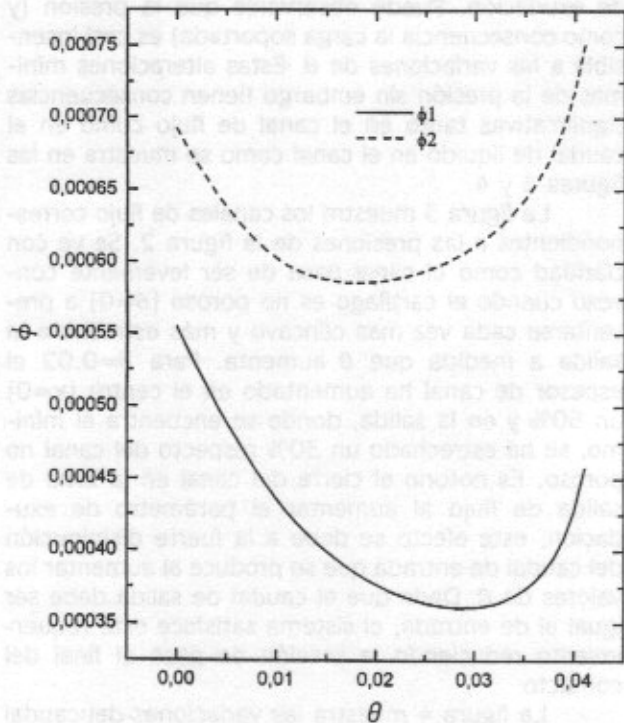


Figura 6.- Coeficientes de fricción como funciones del factor de exudación.

Los factores de fricción calculados son pequeños en concordancia con las mediciones experimentales y muestran una disminución con el aumento del factor de exudación en la mayor parte de su intervalo de variación como puede verse en la figura 6. El factor de fricción ϕ_1 desciende un 34% entre $\theta=0$ y $\theta=0.029$ y ϕ_2 desciende alrededor de un 15% entre $\theta=0$ y $\theta=0.018$. Este descenso está relacionado fundamentalmente con el aumento del canal en la mayor parte del contacto mostrado en la figura 3; los factores de fricción mínimos que se observan sugieren entonces la existencia de un canal de flujo óptimo y por lo tanto una porosidad óptima para las superficies.

El aumento de ambos factores de fricción después de alcanzar los valores mínimos, se debe a que la zona de estrechamiento al final del contacto se hace tan pronunciada al aumentar θ que el incremento de la fuerza de fricción en ese tramo supera la disminución de la fuerza de fricción que se experimenta en los tramos donde el canal se ensancha (ver figura 3).

Las predicciones del modelo en cuanto al estrechamiento del canal en la zona de descarga con el aumento del parámetro de porosidad merecen comentarios adicionales. En primer lugar, a medida que el valor de θ se aproxima a 0.04 aparecen dificultades en la convergencia del método iterativo que son parcialmente superados mediante el uso de una discretización más refinada en la zona donde el canal se estrecha. Sin embargo, las dificultades aumentan a medida que el cierre progresa hasta llegar a un punto donde el método de Newton deja de converger. Una de las razones más evidentes para que ello suceda tiene su origen en la ecuación (2) donde el denominador del integrando es el cubo de la altura del canal; es claro que a medida que $h \rightarrow 0$ puedan aparecer problemas numéricos.

En cuanto a las predicciones obtenidas para valores pequeños del parámetro de exudación $\theta \leq 0.02$, podemos concluir que el modelo sugiere que el fenómeno de exudación/imbibición resulta beneficioso para la articulación en cuanto induce un funcionamiento autolubricante y favorece la disminución del coeficiente de fricción con que las juntas sinoviales trabajan.

CONCLUSIONES

Los resultados numéricos mostrados en este trabajo ofrecen una buena descripción cualitativa del efecto de la porosidad sobre la lubricación de las articulaciones. En coincidencia con resultados experimentales, el modelo predice valores pequeños del coeficiente de fricción. Muestra además que el coeficiente de fricción puede verse disminuido como consecuencia de la porosidad, en un rango de valores de los parámetros.

Dichos resultados permiten visualizar la evolución local de la presión, deformación y, exudación en la superficie de los cartílagos. De esta manera puede

obtenerse una descripción precisa del proceso. Esto es particularmente interesante debido a que el efecto de la porosidad puede ser analizado en detalle. De esta manera fue posible determinar que al incrementarse la porosidad de la superficie aumenta el caudal local en la zona lubricada, aun cuando se reduce el caudal de líquido lubricante que ingresa al canal. De este modo los resultados parecen confirmar el efecto de autolubricación de las juntas sinoviales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por la Universidad Nacional de Entre Ríos, la Universidad Nacional del Litoral y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Se agradece a los señores Diego Campana y Sebastián Ubal por su eficiente colaboración.

REFERENCIAS

- 1.- Lightfoot, E.N., Transport phenomena and living systems, John Wiley and Sons, 1974.
- 2.- Dowson, D. and Higginson, G.R., Elastohydrodynamic lubrication, Pergamon Press, 1977.
- 3.- Jin, Z.M., Dowson, D. and Fisher, J., Fluid film lubrication of natural hip joints, Thin Films in Tribology, Elsevier, Sci., Pub., 1993.
- 4.- Hlavacek, M. and Vokoun, D., Lubrication of a cylindrical synovial joint considering rolling motion and elastic incompressible cartilage, Wear, 165, 1-7, 1993.
- 5.- Mow, V.C. and Lai, W.N., "Recent development in synovial joint biomechanics", Siam Review, 22, Num. 3, 1980, 275.
- 6.- Kistler, S.F., The fluid mechanics of curtain coating and related viscous free, surface flows) Ph.D. Thesis, University of Minnesota, U.S.A., 1983.
- 7.- Di Paolo, J., "Solución simultánea de las ecuaciones gobernantes del problema termoelastohidrodinámico de contacto lineal aceptado para su publicación en la Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., 14, Núm. 4, 1998, 461-480.
- 8.- Dowson, D. and Jin, Z.M., "Microelastohydrodynamic lubrication of low-elastic-modulus solids on rigid substrates", J. Phys. D: Appl. Phys., 25, 1992, 116-123.
- 9.- Dintenfuss, L., "Rheology of complex fluids and some observations on joints lubrication" Fed. Proc., 25, 1966, 1054-1060.
- 10.- Di Paolo, J., Corvalán, C.M. y Saita, F.A., "Solución numérica de la ecuación de Reynolds. Formulación diferencial vs. formulación integral", Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., 11, Núm. 3, 1995, 303-322.
- 11.- Corvalán, C.M., Análisis de los flujos de recubrimiento de materiales elastóporosos, Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 1993.
- 12.- Ghosh, M.K. and Hamrock, B.J., "Thermal elastohydrodynamic lubrication of line contact" ASLE Trans., 28, Num 2, 1984) 159.
- 13.- Di Paolo, J. y Saita, F.A., "Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal" Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., 8, Núm. 4, 1992, 427-438.